A música dos números primos

Marcus du Sautoy

A música dos números primos

A história de um problema não resolvido na matemática

Tradução:
Diego Alfaro

ZAHAR
Jorge Zahar Editor
Rio de Janeiro

Em memória de Yonathan du Sautoy (21 de outubro de 2000)

Título original:
The Music of the Primes
(Why an Unsolved Problem in Mathematics Matters)

Tradução autorizada da edição inglesa
publicada em 2004 por Harper Perennial,
um selo de HarperCollins*Publishers*, de Londres, Inglaterra

Jorge Zahar Editor Ltda.
rua México 31 sobreloja
20031-144 Rio de Janeiro, RJ
tel.: (21) 2108-0808 / fax: (21) 2108-0800
e-mail: jze@zahar.com.br
site: www.zahar.com.br

Capa: Sérgio Campante

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Du Sautoy, Marcus, 1965-
D866m A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática / Marcus du Sautoy; tradução, Diego Alfaro. — Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.
il.

Tradução de: The music of the primes: why an unsolved problem in mathematics matters
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-378-0037-9

1. Números primos. 2. Teoria dos números. I. Título.

CDD: 512.73
07-3180 CDU: 511.3

Sumário

1 **O desafio de um milhão de dólares,** 9

2 **Os átomos da aritmética,** 27
Em busca de padrões, 32
A prova: o diário de viagem do matemático, 37
As fábulas de Euclides, 44
A busca de primos, 47
Euler, a águia matemática, 50
A tentativa de Gauss, 55

3 **O espelho matemático imaginário de Riemann,** 68
Números imaginários — uma nova paisagem matemática, 75
O mundo através do espelho, 80
A função zeta — o diálogo entre a música e a matemática, 85
Reescrevendo a história grega dos primos, 90

4 **A hipótese de Riemann: de primos aleatórios a zeros ordenados,** 94
Primos e zeros, 99
A música dos primos, 104
A hipótese de Riemann: ordem a partir do caos, 108

5 **A corrida matemática de revezamento: compreendendo a revolução de Riemann,** 113
Hilbert, o Flautista de Hamelin da matemática, 117
Landau, o mais difícil dos homens, 127
Hardy, o esteta matemático, 131
Littlewood, o matemático briguento, 135

6 **Ramanujan, o místico matemático,** 144
Choque de culturas em Cambridge, 152

7 **Êxodo matemático: de Göttingen a Princeton,** 161
Repensando Riemann, 163
Selberg, o escandinavo solitário, 170
Erdös, o mago de Budapeste, 175
Zeros ordenados significam primos aleatórios, 179
Controvérsia matemática, 181

8 **Máquinas da mente,** 189
Gödel e as limitações do método matemático, 192
A miraculosa máquina da mente de Turing, 196
Engrenagens, roldanas e óleo, 201
Do caos da incerteza a uma equação para os primos, 208

9 **A era dos computadores: da mente ao *desktop*,** 219
O computador — a morte da matemática?, 225
Zagier, o mosqueteiro matemático, 229
Odlyzko, o maestro dos cálculos em Nova Jersey, 235

10 **Decifrando números e códigos,** 240
O nascimento da criptografia na internet, 241
RSA, o trio do MIT, 244
Um truque de cartas criptográfico, 248
O desafio do RSA 129, 252
Novos truques na manga, 254
Olhos tapados, 257
À caça de grandes primos, 261
O futuro é elíptico, 264
A beleza da poesia caldéia, 267

11 **De zeros ordenados ao caos quântico,** 273
Dyson, o príncipe-sapo da física, 281
Tambores quânticos, 283
Ritmo fascinante, 287
Mágica matemática, 290
Bilhar quântico, 294
42 – a resposta para a grande pergunta, 300
A última reviravolta de Riemann, 306

12 **A última peça do quebra-cabeça,** 308
Falando muitas línguas, 309
Uma nova Revolução Francesa, 319
Quem ri por último, 326

Referências bibliográficas, 336

Créditos, 342

Agradecimentos, 343

Índice remissivo, 345

1 O desafio de um milhão de dólares

> "Sabemos qual é a seqüência de números? Bem, podemos fazê-la de cabeça. ... 59, 61, 67 ... 71... Não são todos números primos?" Um murmúrio de entusiasmo percorreu a sala de controle. O rosto de Ellie revelou momentaneamente os traços de um sentimento profundo, rapidamente substituído pela sobriedade, um medo de perder o controle, uma apreensão por parecer tola, não-científica.
>
> **Carl Sagan**, *Contato*

Numa manhã quente e úmida de agosto de 1900, o professor David Hilbert, da Universidade de Göttingen, postou-se frente aos cientistas que lotavam a sala de conferências do Congresso Internacional de Matemáticos, realizado na Sorbonne, em Paris. Hilbert já era considerado um dos maiores matemáticos da época e havia preparado uma palestra ousada. Falaria sobre o desconhecido, e não sobre o que já fora provado. Essa abordagem era contrária a todas as convenções habituais, e a platéia pôde notar o nervosismo na voz de Hilbert quando ele começou a esboçar sua visão sobre o futuro da matemática. "Quem de nós não gostaria de levantar o véu que esconde o futuro, vislumbrando os próximos avanços de nossa ciência e os segredos de seu desenvolvimento nos séculos que virão?" Para anunciar o novo século, Hilbert desafiou a platéia com uma lista de 23 problemas que, segundo ele, ditariam o rumo dos exploradores matemáticos do século XX.

Durante as décadas seguintes encontraram-se respostas para muitos desses problemas, e seus descobridores passaram a integrar um ilustre grupo de matemáticos chamado de "classe de honra", que inclui nomes como Kurt Gödel e Henri Poincaré, ao lado de muitos outros pioneiros cujas idéias transformaram o panorama da matemática. Porém, um dos problemas, o oitavo da lista de Hilbert, parecia disposto a atravessar o século sem um vencedor: a hipótese de Riemann.

De todos os desafios lançados por Hilbert, o oitavo tinha algo de especial. Há um mito alemão sobre Frederico Barba-Ruiva, um imperador muito querido que morreu durante a Terceira Cruzada. Segundo a lenda, Barba-Ruiva ainda estaria vivo, adormecido em uma caverna nas montanhas Kyffhauser, e só despertaria quando a Alemanha precisasse dele. Conta-se que alguém perguntou a Hilbert: “E se, como Barba-Ruiva, você pudesse acordar após 500 anos, o que faria?” Hilbert respondeu: “Eu lhe perguntaria: ‘Alguém conseguiu provar a hipótese de Riemann?’”

Quando o final do século XX se aproximava, a maioria dos matemáticos havia se resignado à idéia de que essa pérola entre os demais problemas de Hilbert não sobreviveria apenas ao século — talvez continuasse sem resposta quando Hilbert despertasse de seu sono de 500 anos. Ele havia chocado a platéia do primeiro Congresso Internacional do século XX com sua palestra revolucionária, rica de desconhecido. Porém, uma nova surpresa aguardava os matemáticos que planejavam participar do último congresso do século.

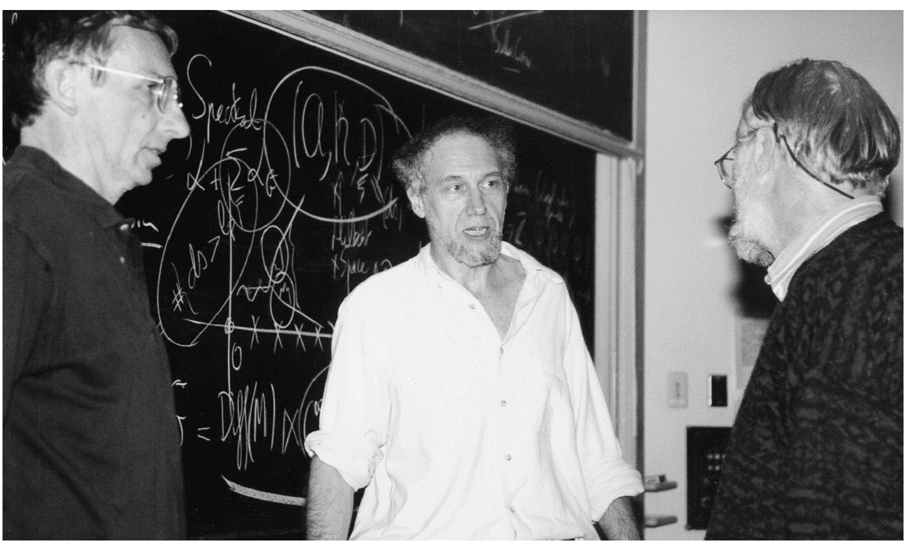
Em 7 de abril de 1997, os computadores de todo o mundo matemático divulgaram uma notícia extraordinária. A página virtual do Congresso Internacional de Matemáticos, marcado para o ano seguinte em Berlim, anunciou que o Cálice Sagrado da matemática fora finalmente encontrado. A hipótese de Riemann havia sido provada. Essa notícia teria importantes efeitos, pois a hipótese de Riemann era um problema fundamental para toda a matemática. Os matemáticos liam seu correio eletrônico entusiasmados com a perspectiva de entender um dos maiores mistérios de sua disciplina.

O anúncio não poderia ter vindo de fonte mais confiável e respeitada — uma carta do professor Enrico Bombieri, um dos guardiões da hipótese de Riemann e membro do prestigiado Instituto de Estudos Avançados de Princeton, por onde já haviam passado Einstein e Gödel. Seu discurso é sereno, mas os matemáticos sempre escutam atentamente o que ele tem a dizer.

Bombieri cresceu na Itália, onde os prósperos vinhedos da família o ensinaram a apreciar as boas coisas da vida. Seus colegas chamam-no carinhosamente de “aristocrata matemático”. Quando jovem, cultivava uma imagem arrojada nas conferências européias das quais participava, muitas vezes chegando em extravagantes carros esporte, e gostava de espalhar o boato de que teria certa vez ficado em sexto lugar em um rali de 24 horas na Itália. Seus êxitos no circuito matemático foram mais concretos e, nos anos 1970, renderam-lhe um convite para ir a Princeton, onde se estabeleceu desde então. Bombieri trocou seu entusiasmo por ralis por uma paixão pela pintura, em particular por retratos.

Porém, o que realmente o fascina é a arte criativa da matemática, em especial o desafio da hipótese de Riemann. Bombieri é obcecado pela hipótese desde a primeira vez que leu a seu respeito, com apenas 15 anos de idade. As propriedades dos números já o fascinavam na época em que vasculhava os livros de matemática que seu pai, um economista, colecionava em uma extensa biblioteca. Bombieri descobriu que a hipótese de Riemann era considerada o problema mais profundo e fundamental da teoria dos números. Sua paixão pela questão cresceu ainda mais quando seu pai lhe prometeu comprar uma Ferrari se conseguisse resolver o problema — o pai de Enrico tentava desesperadamente fazer com que o rapaz parasse de pedir seu carro emprestado.

De acordo com seu e-mail, Bombieri perdera a disputa pelo prêmio. “A palestra de Alain Connes no IEA, na última quarta-feira, gerou um desenvolvimento fantástico”, começava Bombieri. Vários anos antes, o mundo matemático ficara em alerta ao ouvir a notícia de que Alain Connes havia decidido se dedicar à solução da hipótese de Riemann. Connes é um dos revolucionários desse tema, um Robespierre benigno da matemática frente ao Luís XVI representado por Bombieri. É uma figura extremamente carismática, cujo estilo apaixonado destoa muito da imagem do matemático sério e canhestro. Tem a motivação de um fanático que está convencido de sua visão do mundo, e suas palestras são arrebatadoras. Seus seguidores praticamente o idolatram — adoram se unir em barricadas matemáticas para defender seu herói frente a qualquer contra-ofensiva das posições entrincheiradas do Antigo Regime.



No centro, Alain Connes, professor no Institut des Hautes Études Scientifiques e no Collège de France

Connes é membro do Institut des Hautes Études Scientifiques de Paris, a resposta francesa ao Instituto de Princeton. Desde sua chegada, em 1979, o matemático criou uma linguagem completamente nova para a compreensão da geometria. Ele não vê problemas em levar o assunto aos extremos da abstração. Embora os matemáticos em geral se sintam bastante à vontade com o modo altamente conceitual com que sua disciplina tende a enxergar o mundo, a maior parte deles se recusou a acompanhar a revolução abstrata proposta por Connes. Ainda assim, essa nova linguagem geométrica revela muitos indícios sobre o funcionamento do mundo real da física quântica, como Connes se encarregou de demonstrar àqueles que questionam a necessidade de uma teoria tão inóspita. Se isso semeou o terror nos corações das massas matemáticas, que assim seja.

Connes provocou surpresa e até espanto por acreditar que sua nova geometria poderia não só desmascarar o mundo da física quântica como também explicar a hipótese de Riemann — o maior mistério existente sobre os números. Sua audácia em penetrar no coração da teoria dos números e confrontar abertamente o mais difícil dos problemas pendentes da matemática revela sua falta de respeito pelas fronteiras convencionais. Desde que surgiu em cena, no meio da década de 1990, tem havido uma expectativa no ar, pois se há alguém capaz de dominar esse problema notoriamente difícil, esse alguém é Alain Connes.

Aparentemente, porém, a última peça do complexo quebra-cabeça não havia sido colocada por Connes. Bombieri continuava a carta contando que um jovem físico da platéia vira, "num relance", como utilizar seu mundo bizarro de "sistemas fermiônicos-bosônicos supersimétricos" para atacar a hipótese de Riemann. Não há muitos matemáticos familiarizados com esse coquetel de palavras estranhas, mas Bombieri explicou que ele descrevia "a física correspondente ao agrupamento próximo ao zero absoluto de uma mistura de ânions e trouxons com spins opostos". Ainda parecia bastante obscuro, mas vale lembrar que essa era a resposta para o problema mais difícil da história da matemática, portanto ninguém esperava uma solução simples. Segundo Bombieri, após seis dias de trabalho ininterrupto, e com a ajuda de uma nova linguagem de computador chamada Mispar, o jovem físico havia finalmente decifrado o pior problema matemático.

Bombieri concluía o e-mail com as palavras: "Caramba! Difundam esta notícia o máximo possível." Embora a prova da hipótese de Riemann por um jovem físico fosse um fato extraordinário, não constituiu uma grande surpresa. Nas últimas décadas, boa parte da matemática tem estado entrelaçada com a física. Apesar de ser um problema ancorado na teoria dos números, há alguns anos a hipótese de Riemann vem apresentando ressonâncias inesperadas com questões da física de partículas.

Os matemáticos começaram a alterar seus planos de viagem para poder ir a Princeton e presenciar o grande momento. Ainda havia memórias recentes da emoção sentida alguns anos antes, quando um matemático inglês, Andrew Wiles, anunciara uma prova do último teorema de Fermat em uma palestra realizada em Cambridge, em junho de 1993. Wiles provou que Fermat estava certo ao afirmar que a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções quando n é maior que 2. Quando Wiles largou o pedaço de giz ao final da palestra, estouraram garrafas de champanhe, e câmeras dispararam seus flashes.

Contudo, os matemáticos sabiam que a prova da hipótese de Riemann teria um significado muito maior para o futuro da matemática do que saber que a equação de Fermat não tem soluções. Como Bombieri aprendera em seus tenros 15 anos, a hipótese de Riemann tenta compreender os objetos mais fundamentais da matemática — os números primos.

Esses números são os próprios átomos da aritmética. São os números indivisíveis, que não podem ser representados pela multiplicação de dois números menores. Os números 13 e 17 são primos, ao contrário de 15, que pode ser expresso como 3 vezes 5. Os primos são as pérolas que adornam a vastidão infinita do universo de números que os matemáticos exploraram ao longo dos séculos. Eles despertam a admiração dos matemáticos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... — números eternos que existem em uma espécie de mundo independente de nossa realidade física. São um presente da natureza para o matemático.

A importância matemática dos primos se deve a sua capacidade de gerar todos os demais números. Todo número não primo pode ser formado pela multiplicação desses blocos de construção primos. Cada uma das moléculas do mundo físico pode ser composta por átomos da tabela periódica de elementos químicos. Uma lista dos primos é a tabela periódica do matemático. Os números 2, 3 e 5 são como o hidrogênio, o hélio e o lítio no laboratório do matemático. Ao dominar esses blocos de construção, o matemático tem a esperança de descobrir novos caminhos através da grande complexidade do mundo da matemática.

Ainda assim, apesar de sua aparente simplicidade e de seu caráter essencial, os números primos perduram como os objetos mais misteriosos já estudados pelos matemáticos. Em uma disciplina dedicada a encontrar padrões e ordem, os primos representam o desafio supremo. Observe uma lista de números primos, e você descobrirá que é impossível prever quando surgirá o próximo deles. A lista parece caótica, aleatória, não nos fornece qualquer pista sobre como determinar o próximo número. A seqüência de primos é a pulsação da matemática, mas é uma pulsação tonificada por um forte coquetel de cafeína:

Os primos até o número 100 — a pulsação irregular da matemática.

Você consegue encontrar uma fórmula que gere os números dessa lista, alguma regra mágica que lhe diga qual será o 100º número primo? A questão tem atormentado as mentes matemáticas de todas as épocas. Depois de mais de dois mil anos de esforços, os primos parecem resistir a qualquer tentativa de encaixá-los em um padrão reconhecível. O tambor dos primos tem tocado sua seqüência de números ao longo de gerações: duas batidas, seguidas por três batidas, cinco, sete, onze. O ritmo segue em frente, e torna-se fácil acreditar que seja causado por ruído branco aleatório, sem qualquer lógica interna. No centro da matemática, que é a busca pela ordem, só escutávamos o som do caos.

Os matemáticos não suportam admitir a possibilidade de que talvez não exista uma explicação para o modo como a natureza escolheu os primos. Se a matemática não tivesse uma estrutura, uma simplicidade bela, não valeria a pena estudá-la. Escutar ruído branco nunca foi um passatempo muito apreciado. Nas palavras do matemático francês Henri Poincaré, "o cientista não estuda a natureza por sua utilidade; ele o faz porque se deleita com ela, e esse deleite vem de sua beleza. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, e se não valesse a pena conhecê-la, não haveria por que viver esta vida".

Poderíamos imaginar que a pulsação dos números primos se acalmasse após um início agitado. Não é bem assim — as coisas só parecem piorar à medida que a contagem aumenta. Estes são os primos que existem entre os 100 números anteriores e posteriores a 10.000.000; primeiro, os que antecedem 10.000.000:

9.999.901, 9.999.907, 9.999.929, 9.999.931, 9.999.937, 9.999.943, 9.999.971, 9.999.973, 9.999.991

Agora veja como há poucos primos entre os primeiros 100 números posteriores a 10.000.000:

10.000.019, 10.000.079

É difícil imaginar uma fórmula que seja capaz de gerar esse tipo de padrão. De fato, essa procissão dos primos se assemelha muito mais a uma sucessão de números aleatórios que a um belo padrão ordenado. Da mesma forma que saber os resultados das primeiras 99 vezes que jogamos uma moeda não ajuda muito na previsão do 100º lance, os primos também parecem desafiar qualquer previsão.

Os números primos representam para os matemáticos um dos dilemas mais estranhos de sua disciplina. Por um lado, cada número é ou não é primo. Lançar uma moeda não faz com que um número se torne subitamente divisível por outro número menor. Ainda assim, não se pode negar que a lista de primos parece ser uma seqüência de números escolhidos aleatoriamente. Os físicos se acostumaram à idéia de que um dado quântico decide o destino do Universo, escolhendo aleatoriamente, em cada lance, o lugar onde os cientistas poderão encontrar matéria. Porém, é um pouco desconcertante ter de admitir que a natureza jogou uma moeda para determinar esses números fundamentais nos quais a matemática se baseia, decidindo lance a lance o destino de cada número. A aleatoriedade e o caos são anátemas para o matemático.

Apesar de sua aleatoriedade, os números primos — mais que qualquer outra parte de nossa herança matemática — têm um caráter atemporal, universal. Os primos existiriam mesmo que não houvéssemos evoluído o suficiente para reconhecê-los. Como disse o matemático de Cambridge G.H. Hardy em seu famoso livro *A Mathematician's Apology*, "317 é um primo não porque pensemos que o seja, ou porque nossas mentes estejam moldadas desta ou daquela maneira, mas *porque é assim*, porque a realidade matemática é construída dessa forma".

Alguns filósofos podem discordar de uma visão de mundo tão platônica — essa crença numa realidade absoluta e eterna além da existência humana —, mas acredito que é isso o que os torna filósofos, e não matemáticos. No livro *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, há um diálogo fascinante entre Alain Connes, o matemático citado no e-mail de Bombieri, e o neurobiólogo Jean-Pierre Changeux. Durante a conversa, nota-se um momento muito tenso quando o matemático defende a existência da matemática como algo externo à mente, enquanto o neurologista está determinado a refutar essa idéia: "Por que não veríamos '$\pi = 3{,}1416$' escrito em letras douradas no céu, ou '$6{,}02 \times 10^{23}$' surgindo nas reflexões de uma bola de cristal?" Changeux manifesta sua frustração com a insistência de Connes de que, "independentemente da mente humana, existe uma realidade matemática crua e imutável", e no centro desse mundo encontramos a lista imutável de primos. A matemática, declara Connes, "é inquestionavelmente a única linguagem *universal*". Podemos imaginar a existência de diferentes químicas ou biologias do outro lado do Universo, mas os números primos continuarão sendo primos em qualquer galáxia em que os contemos.

No romance clássico de Carl Sagan, *Contato*, os alienígenas usam números primos para fazer contato com a vida na terra. Ellie Arroway, a heroína do livro, trabalha no programa Seti, sigla em inglês para "Busca por inteligência extraterrestre", escutando as crepitações do cosmo. Certa noite, quando são apontados em direção a Vega, os radiotelescópios subitamente captam pulsos estranhos sobrepostos ao ruído de fundo. Ellie reconhece imediatamente o ritmo desse sinal de rádio. Dois pulsos seguidos por uma pausa, então três pulsos, cinco, sete, onze e assim por diante, seguindo por todos os números primos até 907. Então a seqüência recomeça.

Esse tambor cósmico tocava uma música que os terráqueos não deixariam de reconhecer. Ellie tinha certeza de que somente uma forma de vida inteligente poderia gerar esse ritmo: "É difícil imaginar algum plasma radioativo emitindo uma série regular de sinais matemáticos como esses. Os números primos foram escolhidos para chamar nossa atenção." Se a cultura extraterrestre houvesse transmitido os números vencedores da loteria alienígena dos últimos dez anos, Ellie não teria sido capaz de distingui-los do ruído de fundo. Embora a série de primos pareça ser tão aleatória quanto uma lista de bilhetes vencedores, sua constância universal determinou a escolha de cada número nessa transmissão alienígena. Essa é a estrutura que Ellie reconhece como o sinal de vida inteligente.

A comunicação através de números primos não se restringe à ficção científica. No livro *O homem que confundiu sua mulher com um chapéu*, Oliver Sacks relata o caso de dois irmãos gêmeos de 26 anos de idade, John e Michael, cuja forma mais profunda de comunicação consistia em um intercâmbio de números primos de seis algarismos. Sacks descreve a primeira vez em que os encontrou trocando números secretamente no canto de uma sala: "A princípio, pareciam dois *sommeliers* experientes, compartilhando sabores exóticos, apreciações sutis." Inicialmente, Sacks não consegue entender o que os gêmeos estão fazendo. Porém, assim que decifra o código, memoriza alguns primos com oito algarismos e os revela furtivamente durante a conversa da manhã seguinte. A surpresa dos gêmeos é seguida por um momento de concentração profunda, que se transforma em júbilo quando reconhecem outro número primo. Embora Sacks houvesse recorrido a tabelas de primos para descobrir seus números, o modo como os gêmeos geravam seus primos é um enigma impenetrável. Será possível que esses autistas-gênios conhecessem alguma fórmula secreta que passou despercebida por gerações de matemáticos?

A história dos gêmeos é uma das favoritas de Bombieri.

> Para mim, é difícil ouvi-la e não ficar pasmo e deslumbrado com o funcionamento do cérebro, mas não sei se meus amigos não-matemáticos reagem da mesma maneira. Terão eles alguma idéia da natureza bizarra e fantástica, quase sobrenatural, desse talento singular que os gêmeos manifestavam tão naturalmente? Estarão cientes de que os matemáticos têm se esforçado durante séculos para conceber um modo de fazer o que John e Michael faziam espontaneamente: gerar e reconhecer números primos?

Antes que alguém conseguisse descobrir o segredo dos gêmeos, os médicos os separaram, aos 37 anos de idade, por acreditarem que essa linguagem numerológica privada estaria prejudicando seu desenvolvimento. Se houvessem escutado as conversas abstrusas que circulam pelos departamentos universitários de matemática, esses médicos possivelmente também recomendariam interditá-los.

É provável que os gêmeos estivessem utilizando um truque baseado no que é chamado de pequeno teorema de Fermat para testar se um número é primo. O teste é semelhante ao método que os autistas-gênios utilizam para determinar rapidamente que o dia 13 de abril de 1922, por exemplo, foi uma quinta-feira – façanha que esses gêmeos demonstravam regularmente em programas de TV. Ambos os truques dependem de algo conhecido como aritmética do relógio ou modular. Mesmo que não tivessem uma fórmula mágica para encontrar os primos, sua habilidade era extraordinária. Antes de serem separados, já haviam chegado a números de 20 algarismos, muito além dos valores atingidos pelas tabelas de primos de Sacks.

De modo semelhante à heroína de Sagan, que escutava a pulsação cósmica de números primos, e a Sacks espionando os gêmeos, há muitos séculos os matemáticos se esforçam em decifrar alguma ordem nesse ruído.

Porém, nada parecia fazer sentido, como ocorre quando ouvidos ocidentais escutam música oriental. Mas então, na metade do século XIX, foi feito um grande progresso. Bernhard Riemann passou a abordar o problema de uma forma completamente nova. Utilizando uma nova perspectiva, começou a compreender parte do padrão responsável pelo caos dos primos. Havia uma harmonia sutil e inesperada escondida sob o ruído externo dos primos. Apesar desse grande salto adiante, a nova música ainda ocultava muitos de seus segredos. Riemann, o Wagner do mundo matemático, foi audacioso e fez uma previsão ousada sobre a melodia misteriosa que havia descoberto. Essa previsão ficou conhecida como a hipótese de Riemann. Quem conseguir provar que a intuição de Riemann sobre a natureza dessa música estava correta, terá explicado por que os primos nos transmitem uma impressão tão convincente de aleatoriedade.

Riemann desenvolveu sua idéia original após descobrir um espelho matemático através do qual era possível observar os primos. O mundo de Alice foi virado de cabeça para baixo quando a menina atravessou o espelho. Já no estranho mundo matemático situado do outro lado do espelho de Riemann, aconteceu o contrário: o caos dos primos pareceu se tornar extremamente ordenado, revelando um padrão muito consistente. Assim, conjecturou que essa ordem sempre se manteria, por mais longe que fôssemos em nossa exploração do mundo infinito além do espelho. Sua previsão sobre a existência de uma harmonia interna do outro lado do espelho explicaria por que, vistos de fora, os primos parecem tão caóticos. A metamorfose provocada pelo espelho de Riemann, transformando o caos em ordem, parece quase um milagre para muitos matemáticos, e Riemann lhes deixou o desafio de provar que a ordem que ele acreditava observar realmente existia.

O e-mail de Bombieri de 7 de abril de 1997 prometia o início de uma nova era. Riemann se enganara com uma miragem. O "aristocrata matemático" instigava os matemáticos com uma possível explicação para o caos aparente dos primos. Todos estavam ansiosos por pilhar os grandes tesouros que certamente seriam revelados pela solução desse problema tão difícil.

Uma resposta para a hipótese de Riemann terá enormes implicações para muitos outros problemas matemáticos. Os números primos ocupam lugar tão fundamental na matemática que qualquer progresso na compreensão de sua natureza terá um impacto grandioso. A hipótese de Riemann parece ser um problema inevitável. Quando navegamos pelo terreno matemático, é como se todos os caminhos, em algum ponto, levassem necessariamente à mesma paisagem deslumbrante da hipótese de Riemann.